4 數學歸納法

當你研究一則數學問題時，常會發生的事情是：你可以猜想到問題的答案或者是公式(不等式)，但是卻沒有辦法證明它。如果你的公式（或者是不等式）是與正整數相關的式子。那麼數學歸納法將提供你一個便捷的證明方法。這裡的目的就是要提出一些利用數學歸納法解決問題的範例，以供讀者參考。

數學歸納法是數學家皮阿諾把正整數的性質抽象而得的五個公理中的第五公設。數學歸納法的版本很多，最常用的方式是：先檢驗欲證的等式（或者不等式）在$n=1$時成立。其次假設此等式（或者不等式）在$n=k$時成立，然後利用假設的結果證明$n=k+1$時亦成立。這是最常用的第一種形式的數學歸納法。事實上，我們也常用到第二種形式的數學歸納法。第二種形式的數學歸納法的證明模式也是先檢驗$n=1$時成立。其次假設$n=1,2,3,\cdots,k$時，欲證的結果也成立，然後利用這個假設結果證明$n=k+1$時亦成立。事實上，數學歸納法的證明方法就如同推骨牌一樣，只要你的版本能夠推倒所有的骨牌（這裡的骨牌是指所有的正整數），那它本身就是一種合法的證明方式，並非一定要墨守成規的使用上述所談的第一種形式或者是第二種形式的數學歸納法。最具代表性的例子就是證明算-幾不等式

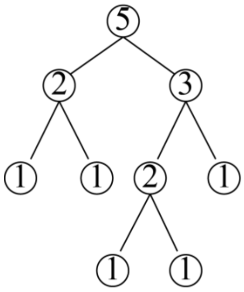
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

的歸納法形式，稱它為“以退為進”形的數學歸納法。其他還有所謂“分段”形、“迂迴”形、“曲線”形、“大誇度”形的數學歸納法。

4.1 用算術騙人的商店

月餅專賣店為了促銷，想出如下的花招：一盒月餅有n個，售價由顧客玩遊戲來決定，遊戲是這樣的，顧客須將n個月餅分成兩堆（每堆至少一個)，並將兩堆的月餅個數相乘，得到第一個乘數。然後再將第一堆及第二堆各別再分成兩堆（每堆至少一個)，又可得到兩個乘數。依此繼續下去，直到每一堆剩下一個月餅（不能再分）為止。這樣會

產生很多乘數，n 個月餅的售價就是這些乘數的和。你知道如何將 n 個月餅分堆，才最省錢嗎？下圖是阿三在他的分堆方法之下，買五個月餅的錢數：



$2\times 3=\boxed{6}$

$1\times 1=\boxed{1}$ $2\times 1=\boxed{2}$

$1\times 1=\boxed{1}$

阿三這樣的分堆買五個月餅須付 6 ＋ 1 ＋ 2 ＋ 1 ＝ 10 元美金。

【證明】當 $n=1$ 時，因為已經不可能再分了，所以不需要錢（0 美金）。當 $n=2$ 時，只有一種分法，需要 1 美金。當 $n=3$ 時，不管是哪一種分法，都是 3 美金。

因此猜想：n 個月餅時，無論你如何分，都需要

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

美金。採用數學歸納法證明如下：

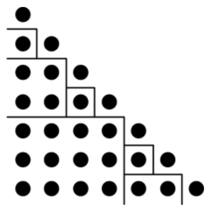
(1) 當 $n=1,2,3$ 時，與猜測的答案相同。

(2) 假設 $n=1,2,3,\cdots,\ k-1$ 時，無論哪一種分法，所需要的錢都是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 美金。當 $n=k$ 時，設第一次將月餅分成 a 個與 $k-a(1\le a\le k-1)$ 個兩堆。那麼所產生的第一個乘數為 $a\cdot(k-a)$。根據假設，a 個那堆繼續分下去所產生的乘數總和為 $\frac{a(a-1)}{2}$；而 $k-a$ 個那堆繼續分下去所產生的乘數總和為 $\frac{(k-a)(k-a-1)}{2}$。因此乘數總和為

$$a(k-a)+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{(k-a)(k-a-1)}{2}=\frac{k(k-1)}{2}.$$

因此無論如何分，所需要的錢數都是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 美金。

【另解】不管你如何分堆，買七個月餅都是 21 元美金。你可以從下圖觀察出來嗎？



4.2 埃及分數

像$\frac{1}{3},\frac{1}{11},\frac{1}{231}$這樣分子為 1 的分數，我們稱之為埃及分數。萊茵紙草記載著“埃及人擅長將真分數寫成相異埃及分數的和”。例如

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},$$
$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231},$$
$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$$

等。是否每個真分數$\frac{a}{b}$(a,b是滿足$1<a<b$且互質的的正整數)皆可表為若干個相異埃及分數的和一直困擾著埃及人及後來的數學家。在 1880 年時，西爾威斯特解決了這個問題，他僅用了數學歸納法而已。

定理 4.1　每個真分數$\frac{a}{b}$都可以表為若干個相異埃及分數的和。

【證明】我們對分子a進行數學歸納法的證明。

(1) 當$a=1$時，$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}$剛好是一個埃及分數。

(2) 設此定理對所有分子$<a(a\geq 2)$的最簡真分數都成立。現在證明真分數$\frac{a}{b}$可以表為若干個相異埃及分數的和。因為$1>\frac{a}{b}>0$及$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>0$，所以可以找到一個正整數$q(q\geq 2)$滿足

$$\frac{1}{q}<\frac{a}{b}<\frac{1}{q-1}.$$

由此得到$0< aq-b < a,$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q}+\frac{aq-b}{bq} \quad 及 \quad \frac{aq-b}{bq}<\frac{1}{q}.$$

由歸納法得到：真分數

$$\frac{aq-b}{bq}$$

可以表成若干個相異埃及分數的和，且每一個都與$\frac{1}{q}$相異。因此，$\frac{a}{b}$可以表成若干個相異埃及分數的和。

4.3 特納定理

定理 4.2(特納定理) 空間中有$2n$ $(n \geq 2)$個相異點且任三點不共線。若任意的以這些點為端點，連接出n^2+1條線段，則此n^2+1條線段至少可形成一個三角形(即有三個點互相連接)。

【證明】採用數學歸納法證明如下：

(1) 當$n = 2$時，共有$4 = 2\cdot 2$個點，連結$5 = 2^2+1$條線段。因為四個點共可決定六條線段，所以僅有一條線段未連結。因此可以連出兩個三角形。

(2) 設有$2(n-1)$點，連結

$$(n-1)^2+1$$

條線段時，必存在至少一個三角形。當有$2n$個點，連結

$$n^2+1$$

條線段時。因為$n^2+1 \geq 1$，所以至少有一條線段。不妨假設P,Q就是這$2n$個點中的兩個，而且線段PQ就是此條線段。

(i) 如果其餘的$2(n-1)$個點中，有一個點R同時與P,Q連結，則此時便形成三角形PQR.

(ii) 如果其餘的$2(n-1)$個點中，沒有任何點同時與P,Q連結，則這$2(n-1)$個點與P,Q至多連結$2(n-1)$條線段。由此知道：這$2(n-1)$個點彼此所連結的線段數$\geq n^2+1-1-2(n-1) = (n-1)^2+1$ 條。根據數學歸納法：這$2(n-1)$個點至少構成一個三角形。

4.4 拈的加法表

下圖是一個向右及向上無限延伸的棋盤。為了方便起見，例如將記號★所在的格子稱為 $(3,7)$ 格子。喜歡玩數學遊戲的數學家們，用一種很神奇的方法將每一個格子填入一個非負的整數。他們填入的方法是這樣的：由 (a, b) 格子垂直向下看及水平往左看，分別會看到 b 個及 a 個數字（有些數字可能相同）。將第一個不屬於這 $a+b$ 個數字的非負整數填入 (a, b) 格子內，並將此數字記為 $a\oplus b$。舉例來說：

由 $(1,1)$ 格子垂直向下看及水平往左看，所看到的 $2=1+1$ 個數字都是 1，所以 $1\oplus 1=0$（因為 0 是第一個不屬於 $\{1,1\}$ 的非負整數）。再舉例來說：由 $(2,1)$ 格子垂直向下看的數字為 2，水平往左看的數字為 0,1，不屬於 $\{0,1,2\}$ 的最小非負整數為 3。因此 $2\oplus 1=3$。

⋮

7			★					
6								
5								
4								
3								
2								
1	0	3						
0	1	2	3	4	5	6	7	⋯

(1) 根據上述的規則，試算出

$$3\oplus 7, 7\oplus 3, 4\oplus 7, 7\oplus 4$$

的值。

(2) 若 $x\oplus c=y\oplus c$，則 $x=y$。

(3) 試證明：$a\oplus a=0$。

(4) 證明拈的加法具有交換律：

$$a\oplus b=b\oplus a.$$

(5) 證明拈的加法具有結合律：

$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus (b\oplus c).$$

(6) 如果 $0\le a,\ b<2^n$，則 $0\le a\oplus b<2^n$。

(7) 如果$0 \le a < 2^n$，則$a \oplus 2^n = a + 2^n$。

【解答】我們可以完成如下的表

7	6	5	4	3	2	1	0
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
4	5	6	7	0	1	2	3
3	2	1	0	7	6	5	4
2	3	0	1	6	7	4	5
1	0	3	2	5	4	7	6
0	1	2	3	4	5	6	7

關於(2) 的證明，如果$x \ne y$，不妨設$x < y$。這時$x \oplus c$出現在(y, c)的水平左方上。根據定義：$x \oplus c \ne y \oplus c$，跟已知矛盾，所以$x = y$。

我們利用數學歸納法來證明(3)是成立的。當$a = 0,1$時顯然成立。假設$a = 0,1,2,\cdots,n-1$時成立。當$a = n$時，若$n \oplus n \ne 0$，則由(n, n)垂直向下看或者是水平往左看時，會出現 0 的數字。不妨設$b \oplus n = 0 \ (b < n)$，這與$b \oplus b = 0 \ (b < n)$矛盾。因此$n \oplus n = 0$。

現在來證明(4)，對$a + b$的值做數學歸納法。當$a + b = 0,1$時，$a \oplus b = b \oplus a$顯然成立。假設當$a + b < n$時，此交換律都成立。當$a + b = n$時，由定義知：

$a \oplus b$是不屬於集合

$$\{x \oplus b,\ a \oplus y \mid 0 \le x < a, 0 \le y < b\}$$

的最小非負整數。因為$x < a,\ y < b$，所以$x + b < a + b = n,\ a + y < a + b = n$。由歸納假設知道：

$$x \oplus b = b \oplus x,\ a \oplus y = y \oplus a.$$

因此，$a \oplus b$是不屬於集合

$$\{b \oplus x,\ y \oplus a \mid 0 \le x < a, 0 \le y < b\}$$

的最小非負整數。但是此數亦等於$b \oplus a$。故$a \oplus b = b \oplus a$。

我們利用數學歸納法來證明(5) 是成立的。

(i) 當 $a+b+c=0,1$ 時，容易檢驗此結合律成立。

(ii) 假設 $a+b+c<n$ 時，結合律成立。當 $a+b+c=n$ 時，由定義知道：

$(a\oplus b)\oplus c=$ 不屬於集合

$$\{x\oplus c, (a\oplus b)\oplus k \mid x<a\oplus b,\ k<c\}$$

的最小非負整數 $\le$ 不屬於集合

$$\{(i\oplus b)\oplus c, (a\oplus j)\oplus c, (a\oplus b)\oplus k \mid i<a,\ j<b,\ k<c\}$$

的最小非負整數。因為

$$(a\oplus b)\oplus c\notin\{(i\oplus b)\oplus c,(a\oplus j)\oplus c,(a\oplus b)\oplus k \mid i<a,\ j<b,\ k<c\},$$

所以，$(a\oplus b)\oplus c$ 是不屬於集合

$$\{(i\oplus b)\oplus c,(a\oplus j)\oplus c,(a\oplus b)\oplus k \mid i<a,\ j<b,\ k<c\}$$

的最小非負整數。因為 $i+b+c<n,\ a+j+c<n,\ a+b+k<n$，所以

$$(i\oplus b)\oplus c=i\oplus(b\oplus c),(a\oplus j)\oplus c=a\oplus(j\oplus c),(a\oplus b)\oplus k=a\oplus(b\oplus k).$$

所以，$(a\oplus b)\oplus c$ 是不屬於集合

$$\{i\oplus(b\oplus c),\ a\oplus(j\oplus c),\ a\oplus(b\oplus k) \mid i<a,\ j<b,\ k<c\}$$

的最小非負整數。但由前面證明知道：此數亦等於 $a\oplus(b\oplus c)$。因此

$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c).$$

關於(6), (7) 的證明，我們對 n 作數學歸納法一起來證明。

(i) 當 $n=0,\ 1$ 時，容易檢驗(6), (7)同時成立。

(ii) 假設 $n=k$ 時，(6), (7)同時成立，即當 $0\le a,b<2^k$ 時，

$$0\le a\oplus b<2^k,\ a\oplus 2^k=a+2^k.$$

當 $n=k+1$ 時，將 a 與 b 分如下四部分來考慮：

(a) 若 $0\le a,b<2^k$ 時，則由數學歸納法知道成立。

(b) 若 $2^k\le a<2^{k+1},\ 0\le b<2^k$ 時，則令 $a=2^k+a'$，其中 $0\le a'<2^k$。由 $a'\oplus 2^k=a'+2^k$ 及

$0 \le a' \oplus b < 2^k$ 得到

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (2^k + a') \oplus b \\ &= (2^k \oplus a') \oplus b \\ &= 2^k \oplus (a' \oplus b) \\ &= 2^k + (a' \oplus b) \\ &< 2^k + 2^k = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

(c) 若 $0 \le a < 2^k,\ 2^k \le b < 2^{k+1}$ 時，則同理可以證明。

(d) 若 $2^k \le a < 2^{k+1},\ 2^k \le b < 2^{k+1}$ 時，則令 $a = 2^k + a',\ b = 2^k + b'$，其中 $0 \le a',\ b' < 2^k$。由

$0 \le a' \oplus b' < 2^k$ 得到

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (2^k + a') \oplus (2^k + b') \\ &= (2^k \oplus a') \oplus (2^k \oplus b') \\ &= 2^k \oplus (a' \oplus (2^k \oplus b')) \\ &= 2^k \oplus (a' \oplus (b' \oplus 2^k)) \\ &= 2^k \oplus ((a' \oplus b') \oplus 2^k) \\ &= 2^k \oplus (2^k \oplus (a' \oplus b')) \\ &= (2^k \oplus 2^k) \oplus (a' \oplus b') \\ &= 0 \oplus (a' \oplus b') \\ &= a' \oplus b' \\ &< 2^k < 2^{k+1}. \end{aligned}$$

現在證明：若 $0 \le a < 2^{k+1}$，則 $a \oplus 2^{k+1} = a + 2^{k+1}$。由定義知：$a \oplus 2^{k+1}$ 是不屬於集合

$$\{x \oplus 2^{k+1},\ a \oplus y \mid 0 \le x < a,\ 0 \le y < 2^{k+1}\}$$

的最小非負整數。因為 $0 \le a < 2^{k+1}, 0 \le y < 2^{k+1}$，所以由剛剛的歸納證明知道：

$0 \le a \oplus y < 2^{k+1}$，而且由(2)知道：$a \oplus 0, a \oplus 1, \cdots, a \oplus (2^{k+1} - 1)$ 都不相同。因此

$$\{a \oplus y \mid 0 \le y < 2^{k+1}\} = \{0, 1, \cdots, 2^{k+1} - 1\}. \tag{4.1}$$

根據 $a = 0, 1, 2, \cdots, 2^{k+1} - 1$ 的先後次序來計算 $a \oplus 2^{k+1}$。顯然有 $0 \oplus 2^{k+1} = 2^{k+1}$。現在考慮

$1 \oplus 2^{k+1}$，利用(4.1)的結果知道：由 $\left(1,\ 2^{k+1}\right)$ 往下看的數字有 $0, 1, \cdots, 2^{k+1} - 1$；而由 $\left(1,\ 2^{k+1}\right)$

往左看的數字是$0\oplus 2^{k+1}=2^{k+1}$。因此$1\oplus 2^{k+1}=1+2^{k+1}$。其餘同理可逐步推得

$$1\oplus 2^{k+1}=1+2^{k+1}, 2\oplus 2^{k+1}=2+2^{k+1}, \cdots, a\oplus 2^{k+1}=a+2^{k+1}.$$

例題 4.1　試求$1057\oplus 32$的值。

【解】善用$\oplus$的性質可得到

$$\begin{aligned} 1057\oplus 32 &= (2^{10}\oplus 33)\oplus 2^5 \\ &= (2^{10}\oplus 2^5\oplus 1)\oplus 2^5 \\ &= 2^{10}\oplus 1\oplus 2^5\oplus 2^5 \\ &= 2^{10}\oplus 1 \\ &= 1025. \end{aligned}$$

習題 4.1　試由下列的等式中歸納出一個結論，並用數學歸納法證明此結論。

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3 &= 9\times 4, \\ 2^3+3^3+4^3 &= 9\times 11, \\ 3^3+4^3+5^3 &= 9\times 24. \end{aligned}$$

習題 4.2　數列$\lt a_n \gt$滿足：$a_1=3, a_{n+1}=a_n(a_n+2)\ (n\geq 1)$。

(1) 推測a_n的一般公式。

(2) 證明你的推測是正確的。

習題 4.3　設n是一個正整數。試將伽利略分數

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(4n-1)}$$

化簡成最簡分數。

習題 4.4　設$\lt a_n \gt$是一個正實數所構成的無窮數列，且滿足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2, \; n \ge 1.$$

是否此數列為$a_n = n$。

習題 4.5　設數列$< f_n >$滿足

(a) f_n都是正整數，且$f_2 = 2$。

(b) 若$a < b$，則$f_a < f_b$。

(c) 對任意正整數a與b，恆有$f_{a \cdot b} = f_a \cdot f_b$。

證明：對任意正整數n，恆有$f_n = n$。

習題 4.6　有一副牌，有些牌朝上、有些牌朝下。小明任意的從這副牌中間抽出連續的一疊牌(此疊牌必須最上的一張是朝上的、最後一張也是朝上的)。然後把這疊牌上下翻轉後放回原來的位置。不斷地繼續上述動作，只要有牌朝上就必須要抽。試證：無論小明如何選取一疊牌，最後整副牌將全部朝下。(註：如果抽出的這“疊”牌只有一張牌，只需將這張牌翻面放回原來的位置即可)。

習題 4.7　試完成：

(1) 試利用西爾威斯特的方法將真分數$\frac{4}{97}$表成若干個相異埃及分數的和。

(2) 設n為奇數。證明：$\frac{2}{n}$可以表為兩個相異埃及分數的和。

(3) 設正整數n滿足$8 \mid (n-5)$。證明：$\frac{4}{n}$可以表為三個相異埃及分數的和。

習題 4.8　設n為正整數，試判別命題

n^2+n+17都是質數。

是否成立？成立，證明之；不成立，給反例。

動手玩數學

一條環形公路上有 n 個加油站，它們所儲的汽油總量足夠一輛汽車在整個環形公路上行駛一週。證明：帶著空油灌(容量很大)的汽車能夠從某個汽油站出發(帶上該站的汽油)，完成環形公路上的整個旅程。

挑戰題

數論上有許多問題是在探討相鄰整數相乘的性質，例如

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1=5^2,$$
$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1=11^2,$$
$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1=19^2.$$

從上面的觀察容易猜測到「四個相鄰正整數的乘積再加 1 必為完全平方數」，即

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\square^2.$$

讀者可推得$\square$的公式嗎(以 n 來表示)？

接下來考慮像$n!+1$這樣的數。例如

$$n=4 \;\Rightarrow\; 4!+1=5^2,$$
$$n=5 \;\Rightarrow\; 5!+1=11^2,$$
$$n=7 \;\Rightarrow\; 7!+1=71^2.$$

數論學家認為，除了這三個之外，$n!+1$都不會是完全平方數。這是一則尚未解決的問題。

皮阿諾與數學歸納法

十九世紀中葉，在數學公理化思想潮流影響下，義大利數學家皮阿諾在 1889 年把正整數的性質抽象而得到一組公設，後人稱它為皮阿諾公設。皮阿諾公設共有五條公理，數學歸納法就是其中的第五公理，這個公理與集合論裡的良序原理是等價的。所謂的「公設」或「公理」，指的是一些看起來很明顯，但卻無法證明的假設。既然無法證明，又那麼明顯，只好接受它，直接拿來使用吧！類似的情形，在兩千多年前也發生過，歐幾里得的《幾何原本》裡面也同樣列舉了五個公設。其中第五個公設就是鼎鼎有名的「平行公設」。

清末數學家李善蘭曾提出過恆等式：若$n \geq m \geq 1$，則

$$\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j}^2 \binom{n+2m-j}{2m} = \binom{n+m}{m}^2.$$

這則恆等式聲名遠播，流傳到海外。二十世紀五十年代初，匈牙利數學家吐朗（P. Turan）到中國的北京訪問，在一次演講中，用高深的數學知識加以證明李善蘭恆等式。華羅庚冥索苦思“中國人自己難道就不能證明他們的先輩提出的問題嗎？”終於在與吐朗告別時，華羅庚給了他一個數學歸納法的證明，並將這個證明寫入他的一本小冊子《數學歸納法》之中。這也算是皮阿諾創數學歸納法的一大功德吧！